Лекція № 18

Перепишемо 4 рівняння (5.26) у тривимірному вигляді.

Контраваріантний тензор електромагнітного поля визначається формулою (4.23)

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

$x^i = (ct, \vec{r}),\ j^i = (c\rho, \vec{j}).$

Нехай $i = 0$, тоді з (5.26) маємо

$$\frac{\partial F^{0k}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^0;$$

$$\frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = -\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = -\frac{4\pi}{\cancel{c}}(\cancel{c}\rho)$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho.$$

Для $i = 1$:

$$\frac{\partial F^{1k}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^1;$$

$$\frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = -\frac{4\pi}{c} j_x;$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j_x;$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_x; \quad \left(\mathrm{rot}\vec{H}\right)_x = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_x.$$

Проекції (5.26) на напрямки y та z ($i = 2, 3$) знаходяться аналогічно:

$$i = 2; \quad \frac{\partial F^{2k}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^2;$$

$$\frac{\partial F^{20}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{23}}{\partial x^3} = -\frac{4\pi}{c} j_y;$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j_y;$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_y; \quad \left(\mathrm{rot}\vec{H}\right)_y = \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_y.$$

$$i = 3; \quad \frac{\partial F^{3k}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^3;$$

$$\frac{\partial F^{30}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{32}}{\partial x^2} = -\frac{4\pi}{c} j_z;$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial y} = -\frac{4\pi}{c} j_z;$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_z; \quad \left(\mathrm{rot}\vec{H}\right)_z = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_z.$$

Отримуємо замість трьох скалярних рівнянь одне векторне рівняння

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}.$$

Друга пара рівнянь Максвелла у тривимірному вигляді в диференціальній формі

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho; \\ \mathrm{rot}\vec{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}. \end{cases} \tag{5.27}$$

Другу пару рівнянь Максвелла в інтегральному вигляді отримаємо, скориставшись теоремою Гауса для дивергентного рівняння та теоремою Стокса для роторного рівняння відповідно.

Нагадаємо формулювання цих теорем.

Теорема Гауса

$$\oiint_S \vec{a}d\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\vec{a}dV.$$

(потік вектору через довільну замкнену поверхню дорівнює інтегралу від дивергенції цього вектору по об'єму, обмеженому цією поверхнею).

Теорема Стокса

$$\oint_C \vec{a}d\vec{r} = \iint_S \mathrm{rot}\vec{a}d\vec{S}$$

(циркуляція вектору уздовж довільного замкненого контуру дорівнює інтегралу від потоку ротору цього вектору через поверхню, натягнуту на цей контур).

Теорему Гауса інколи в англомовних джерелах називають «дивергентною теоремою», а теорему Стокса «роторною теоремою».

Для дивергентного рівняння отримуємо

$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{E}dV = 4\pi\iiint_V \rho dV; \quad \oiint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi\iiint_V \rho dV;$$

$$\oiint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi q.$$

Тут $q = \iiint_V \rho dV$ – повний заряд в об’ємі *V*. Це рівняння стверджує, що потік вектору електричного поля через довільну замкнену поверхню дорівнює повному заряду, зосередженому в об’ємі, охопленому цією поверхнею. Рівняння називають теоремою Гауса для електричного поля. Рівняння є наслідком закону Кулона. В курсі загальної фізики спочатку формулюють закон Кулона, а потім узагальнюють його у вигляді теореми Гауса. В курсі теоретичної фізики спочатку виводять рівняння Максвелла з принципу найменшої дії, а потім, як наслідки з них отримують відповідні експериментальні закони.

Для роторного рівняння отримуємо

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{H}d\vec{S} = \iint_S \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \right) d\vec{S}; \quad \oint_C \vec{H}d\vec{r} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{E}d\vec{S} + \frac{4\pi}{c}\iint_S \vec{j}d\vec{S}.$$

$$\oint_C \vec{H}d\vec{r} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{E}d\vec{S} + \frac{4\pi}{c}J.$$

Тут $J = \iint_S \vec{j}d\vec{S}$ – повний струм, який проходить через поверхню *S*. Це рівняння є теоремою про циркуляцію, яка в свою чергу є наслідком експериментально відкритого закону Біо–Савара, але доповненою важливим членом $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{E}d\vec{S}$. Цей член ввів в рівняння циркуляції Максвелл й назвав величину $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{E}d\vec{S}$ струмом зміщення. З роторного рівняння випливає, що джерелами магнітного поля є електричні струми (тобто заряди, що рухаються) та змінне електричне поле. Циркуляція вектору магнітного поля уздовж вільного замкненого контуру визначається сумою струмів – провідності та зміщення, які протікають через поверхню, натягнуту на цей контур.

Друга пара рівнянь Максвелла в інтегральному вигляді

$$\oiint_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi q;$$

$$\oint_C \vec{H}d\vec{r} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{E}d\vec{S} + \frac{4\pi}{c}J. \tag{5.28}$$

Перша та друга пара рівнянь Максвелла повністю визначають електромагнітне поле та є основними рівняннями теорії електромагнітного поля.

5.6. Рівняння електродинаміки – рівняння Максвелла

Ще раз напишемо першу та другу пари рівнянь Максвелла в різних виглядах та обговоримо їх властивості.

Диференціальна форма

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{H} = 0; \\ \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho; \\ \mathrm{rot}\vec{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}. \end{cases} \tag{5.29}$$

Інтегральна форма

$$\begin{cases} \oiint\limits_S \vec{H}d\vec{S} = 0; \\ \oint\limits_C \vec{E}d\vec{r} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\iint\limits_S \vec{H}d\vec{S}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \oiint\limits_S \vec{E}d\vec{S} = 4\pi q; \\ \oint\limits_C \vec{H}d\vec{r} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\iint\limits_S \vec{E}d\vec{S} + \dfrac{4\pi}{c}J. \end{cases} \tag{5.30}$$

Чотиривимірна форма

1пара

$$\varepsilon^{iklm}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} = 0;$$

$$\text{або } \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0. \tag{5.31}$$

2пара

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}j^i.$$

Перша пара рівнянь Максвелла встановлює зв’язок тільки між полями, а друга – між полями та зарядами й струмами.

Основні особливості рівнянь Максвелла:

1. Всі <u>рівняння є лінійними</u> відносно полів, бо існує <u>принцип суперпозиції</u>.

2. Якщо поле змінне (або $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0$, або $\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \neq 0$), то обидві компоненти напруженості електромагнітного поля $\vec{E}$ та $\vec{H}$ одночасно відмінні від нуля. <u>Змінне електромагнітне поле існує як єдиний об’єкт</u> та задається двома напруженостями – електричного $\vec{E}$ та магнітного $\vec{H}$.

3. Якщо $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ та $\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$, то система рівнянь Максвелла (5.29) розпадається на дві незалежні пари рівнянь для напруженості електричного поля

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0; \quad \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho$$

та напруженості магнітного поля

$$\mathrm{div}\vec{H} = 0; \quad \mathrm{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}.$$

Постійні електричне та магнітне поля можуть існувати окремо.

4. Джерелами електромагнітного поля є заряди $\rho(\vec{r},t)$ та струми $\vec{j}(\vec{r},t)$. Важливою властивістю рівнянь Максвелла є те, що існують ненульові розв'язки у відсутності зарядів та струмів $\rho = 0, \vec{j} = 0$. Це електромагнітні хвилі, які були спочатку передбачені теоретично, як розв'язки рівнянь Максвелла, а потів відкриті експериментально у дослідах Герца.

З рівнянь Максвелла випливає рівняння неперервності. Покажемо це. Візьмемо дивергенцію від другого рівняння другої пари

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j};$$

$$\mathrm{divrot}\vec{H} = \frac{1}{c}\mathrm{div}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathrm{div}\vec{j};$$

Врахуємо, що дивергенція від ротору будь-якого вектору дорівнює нулю

$$\mathrm{divrot}\vec{H} = (\nabla,[\nabla,\vec{H}]) = 0$$

та врахуємо перше рівняння з другої пари

$$\mathrm{div}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\vec{E}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(4\pi\rho\right) = 4\pi\frac{\partial \rho}{\partial t};$$

$$\frac{4\pi}{c}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j}\right) = 0.$$

Отримуємо рівняння неперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0.$$

В 4-формі беремо 4-дивергенцію від рівняння другої пари

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i;$$

$$\underbrace{\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^i \partial x^k}}_{=0} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial j^i}{\partial x^i}.$$

Зліва маємо нуль, бо це згортання антисиметричного тензору F^{ik} з симетричним. Маємо рівняння неперервності в 4-формі

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0.$$

5.5. Густина енергії та вектор Пойнтінга

Виходимо з рівнянь Максвелла в диференціальній формі (5.29). Роторні рівняння помножимо скалярно на $\vec{H}$ та $\vec{E}$ відповідно

$$\begin{cases} \mathrm{div}\vec{H} = 0; \\ \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Big| \cdot \vec{H}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho; \\ \mathrm{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \Big| \cdot \vec{E}. \end{cases}$$

та віднімемо перше від другого

$$\underbrace{\vec{H}\cdot\mathrm{rot}\vec{E} - \vec{E}\cdot\mathrm{rot}\vec{H}}_{\mathrm{div}\left[\vec{E},\vec{H}\right]} = -\frac{1}{c}\left(\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) - \frac{4\pi}{c}\vec{j}\vec{E};$$

$$\mathrm{div}\left[\vec{E},\vec{H}\right] = -\frac{1}{c}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right) - \frac{4\pi}{c}\vec{j}\vec{E}.$$

$$\frac{c}{4\pi}\mathrm{div}\left[\vec{E},\vec{H}\right] = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right) - \vec{j}\vec{E}.$$

Визначимо **вектор Пойнтінга** так

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]. \qquad (5.32)$$

Маємо

$$\mathrm{div}\vec{\Pi} = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right) - \vec{j}\vec{E};$$

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right) = -\mathrm{div}\vec{\Pi} - \vec{j}\vec{E}.$$

Інтегруємо останній вираз по деякому об'єму

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V\left(\vec{E}^2+\vec{H}^2\right)dV=-\underbrace{\iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{\Pi}dV}_{\oiint\limits_S \vec{\Pi}d\vec{S}}-\iiint\limits_V \vec{j}\vec{E}dV.$$

Тут застосували теорему Гауса й отримали

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V\left(\vec{E}^2+\vec{H}^2\right)dV=-\oiint\limits_S \vec{\Pi}d\vec{S}-\iiint\limits_V \vec{j}\vec{E}dV. \qquad (5.33)$$

З’ясуємо тепер значення інтегралу $\iiint\limits_V \vec{j}\vec{E}dV$ з урахуванням визначення густини струму (5.19)

$$\iiint\limits_V \vec{j}\vec{E}dV=\iiint\limits_V\sum_a e_a\vec{v}_a\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)\vec{E}dV=\sum_a e_a\vec{v}_a\vec{E}=\sum_a e_a\frac{d\vec{r}_a}{dt}\vec{E}=$$

$$=\sum_a\frac{d}{dt}(e_a\vec{r}_a\vec{E})=\sum_a\frac{d}{dt}\varepsilon_{a,\text{кін.}}.$$

Цей доданок описує зміну «кінетичної енергії» зарядів, що рухаються. Перенесемо цей член в формулі (5.33) справа наліво:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{8\pi}\iiint\limits_V\left(\vec{E}^2+\vec{H}^2\right)dV+\sum_a\varepsilon_{a,\text{кін.}}\right]=-\oiint\limits_S \vec{\Pi}d\vec{S}.$$

В разі інтегрування по нескінченному об’єму зліва та відповідно нескінченно віддаленій поверхні справа потік $\oiint\limits_S \vec{\Pi}d\vec{S}$ звертається до нуля, бо вважаємо, що поля на нескінченності немає.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{8\pi}\iiint\left(\vec{E}^2+\vec{H}^2\right)dV+\sum_a\varepsilon_{a,\text{кін.}}\right]=0.$$

Отримуємо закон збереження енергії для замкненої системи, яка складається із частинок та електромагнітного поля:

$$\frac{1}{8\pi}\iiint\left(\vec{E}^2+\vec{H}^2\right)dV+\sum_a\varepsilon_{a,\text{кін.}}=const. \qquad (5.34)$$

Енергія поля

$$w=\frac{1}{8\pi}\iiint\left(\vec{E}^2+\vec{H}^2\right)dV. \qquad (5.35)$$

Густина енергії поля (енергія в одиниці об’єму)

$$W = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right). \tag{5.36}$$

В разі скінченного об’єму потік $\oiint_S \vec{\Pi} d\vec{S}$ є ненульовим. Перенос енергії поля та частинок через поверхню за одиницю часу визначається рівнянням

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(w + \sum_a \varepsilon_a\right) = -\oiint_S \vec{\Pi} d\vec{S}. \tag{5.37}$$

З формули (5.37) стає зрозумілим фізичний сенс вектору Пойнтінга. Вектор Пойнтінга визначає густину потоку енергії електромагнітного поля.